

エントロピー：その形式的呪縛からの解放 #1

人間の非論理的な判断の物質的根拠に関する論理的かつ非論理的な説明の試み

2016.09.28 尾立貴志

導入部分の概要

エントロピーの大きさは、確率的な変化の自由度の大きさに関係します。しかし、エントロピーとは何か、その本質についての理解はまだ不十分であると考えられているようです。まして物理学を専門としない人々への正確で平易な説明に成功しているとは言えない状況が続いています。

このような混乱した状況が生まれている原因は、エントロピーをめぐるよく知られた歴史的経緯だけではなく、そもそも確率とは何かということに対する理解に不足する部分があるためであろうと私は推測しました。

さて、モンティ・ホール問題という確率についての有名な問題があります。この問題は、確率の大きさについて人間が直観的 [#2](#) に評価した大きさと、数学的・論理的に評価した大きさとのズレが面白いので有名になった問題です [1](#)。すでに数学的・論理的な評価が正しいと決着がついたことになっている問題ですが、私はこのようなズレの生じた原因を追究することによって、確率とは何かという問題をより深く捉えることができるのではないかと期待しました。

そこで、論理的には間違っているとされる人間の直観的な確率評価方法にも何らかの物質的根拠があるのではないかと、また論理的な間違いを産み出す物質的根拠の中に、物質のエントロピーを担う物質的な確率（それはいったいどんな確率？）を見いだせるのではないかと考えました。

1. モンティ・ホール問題をマクロレベルとミクロレベルで解く
2. 物質のエントロピーを決めるのはボーア確率である
3. トポロジカル・インデックスは物質のエントロピーである
4. 素数分布と物質のエントロピー

1. モンティ・ホール問題をマクロレベルとミクロレベルで解く

確率的なものの見方は大昔からあるのですが、西洋数学の中で確率を数学の対象として扱うようになったのはパスカルやフェルマーの時代からのようです。その後、ベルヌーイ、ド・モアブル、ベイズ、ラプラス、・・・コルモゴロフ等によって確率論が発展してきました。

「確率とは何か」という問いに対して、現代数学を学んだ人々は、数学的な表現をできるか否かはともかく、確率がどのようなものかについて共通の概念を持っていると考えられます。そこで理解されている「確率」は1種類であり、すべての人に共通の確率概念です。

[#1](#) 2016.08.26 日本フィボナッチ協会 第14回研究集会（協賛：東京理科大学理数教育研究センター）

Breaking Free From the Spell of Entropy (We must take a fundamental change in the basic concept of entropy.)

本稿 <http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/BreakingFreeFromTheSpellOfEntropy.pdf> [Link](#)

会場配布資料 <http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/BreakingFreeFromTheSpellOfEntropy20160826.pdf> [Link](#)

[#2](#) ここでは直感的であるが、興味ある対象に積極的に向かう心の能動的な働きかけを伴う場合、つまり感覚的にとらえたものを論理的理解に変換しようとする脳の働きを伴う場合について「直観的」という言葉を用いています。

そのため、モンティ・ホール問題において多くの人々の直観的な理解とは異なる答えが示されても、ベイズの定理に沿った論理的解説がなされると、直観に反する答えの数学的な正しさを誰もが認めることになります。

しかし私は、確率には根本的に異なる2種類の確率があるのではないかと疑うようになりました。つまり、モンティ・ホール問題における人々の直観的な理解を正しいと認める確率と、ベイズの定理に沿った答えが正しいと認める確率との2種類です。

そして、前者の確率は熱力学の物質的なエントロピーに関係するが、後者の確率は物質のエントロピーとは関係ない（あるいは関係が希薄な）のかもしれないと感じております。

そのように考えると、モンティ・ホール問題において（1種類の確率論に基づく）数学的に正しい答えと異なる直観的理解を多くの人が持つことや、情報理論のシャノン・エントロピーが熱力学のエントロピーとは別物ではないかと考えられてきた歴史的経緯を、「2種類の確率を区別できていなければ、そういうことが起こっても仕方がない」と理解できるようになります。

こういう2種類の確率を考えるようなことが学問的に適切かどうかはわかりませんが、面白そうなので試してみたいと思います。

モンティ・ホール問題とその正解は、簡略に説明すると次のようなものです。

3つの部屋（A, B, C）があり、その中の1つに宝があります。どの部屋に宝があるかは同じ確率（ $=1/3$ ）だとします。宝を狙う挑戦者が部屋を1つ選びます（例えばAとします）。残る2つの部屋（B, C）のうち宝の無い部屋を出題者が1つ選んでドアを開けます（例えばCとします）。ドアの開いていない部屋が2つ残ります（A, B）。どちらかに宝があります。ここで出題者が、挑戦者に選ぶ部屋の変更を許可します（挑戦者は最初Aを選びましたが、Bに変えても良いと）。

さて、挑戦者が選ぶ部屋を変えると（AをやめてBを選ぶと）、宝の当たる確率は大きくなるのでしょうか、それとも変わらないのでしょうか、あるいはむしろ小さくなるのでしょうかという問題です。確率が小さくなると考える人はいないようです。

この問題を知らない一般の方で試すと、残る2つの部屋（A, B）のどちらに宝があるか、その確率は等しいと判断するのが普通です。確率は同じであるが、心理的に部屋を変えてみたくなるという人もいますが、これは、確率が同じだから部屋を変えても良いという意味です。

しかしこの問題の正解は、挑戦者が選択する部屋を変えると（AをやめてBを選ぶと）宝の当たる確率は2倍に大きくなるので、「部屋の選択を変えるべき」というものです¹ (Fig.1)。

まず、3つの部屋を（ABC）と表記します。最初は、それぞれ $1/3$ の確率で（**A**BC）、（A**B**C）、（AB**C**）の3種類の可能性があります。（**A**BC）は部屋Aに宝があるという意味です。

挑戦者が部屋Aを選びます。記号のAを四角で囲み、挑戦者に選ばれていることを示すことにすると、3種類の可能性は（**A**BC）、（**A**B C）、（**A**B C）と表わされます。（**A**B C）は、宝は部屋Bにあるが、挑戦者は部屋Aを選んでいていることを示しています。挑戦者は部屋を選んだだけで

あり、まだどの部屋もドアは閉じたままです。3種類はそれぞれ $1/3$ の確率です。

(**A** B C) の場合、出題者は C か B のドアを開けます。C を開けた時を (**A** B 空)、B を開けた時を (**A** 空 C) と表します。どちらも宝は無いので、C か B かランダムに開けるとすると、各々は $1/6$ の確率です。(**A** B 空) の確率と (**A** 空 C) の確率を併せると $1/3$ となります。

(**A** **B** C) の場合、出題者は宝の無い C のドアを開けます。(**A** **B** 空) と表します。この確率は $1/3$ です。

(**A** B **C**) の場合、出題者は宝の無い B のドアを開けます。(**A** 空 **C**) と表します。この確率は $1/3$ です。

さて、出題者が部屋の数をも 2 つに減らし、挑戦者に選択の変更を許可した後も挑戦者が最初に選んだ部屋 A を選び続けたとき、宝が当たるパターンは (**A** B 空) か (**A** 空 C) の場合であり、当たる確率は両者を併せた $1/3$ です。

挑戦者が部屋 A を他の部屋に変えたとき、宝が当たるパターンは (**A** **B** 空) か (**A** 空 **C**) であり、当たる確率は両者を併せた $2/3$ となります。

宝が A にある確率は $1/3$ 、B または C にある確率は $2/3$ ですが、宝が B または C にある時は、出題者が開けなかった方の部屋を選ぶと必ず宝が当たります。

したがって、最初に選んだ部屋を変えることにより宝の当たる確率は $1/3$ から $2/3$ へ増えるので、挑戦者は最初に選んだ部屋を変えるべきであるというのが数学的・論理的な正解です。

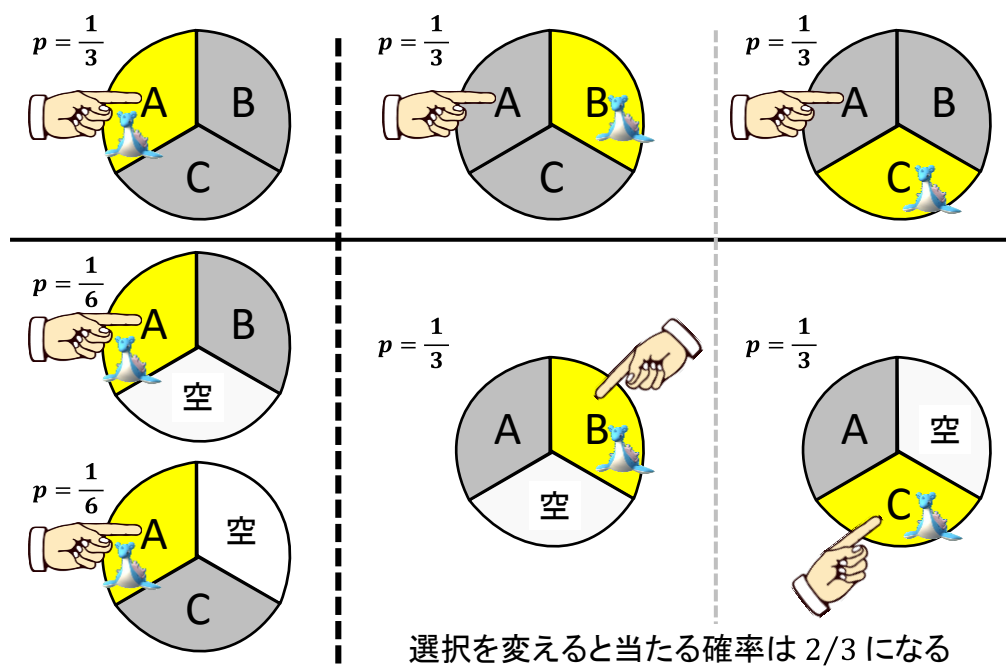


Fig.1 モンティ・ホール問題の正解 (マクロレベル)

それではここで、宝の替わりに 1 個の電子を使ってモンティ・ホール問題を考えてみましょう。なお、私は量子力学を知らないなので、用語の使い方などは不適切かもしれません。

まず、電子が中心に 1 個ある空間を、(小さな?大きな?) 仕切りで等しく 3 つに区分できたとします。現実にはそんな区分けはできないので思考実験となります。3 つの小空間を (A B C) と表記します。最初、1 個の電子が (A B C) に均等に分布しているものとします。つまり、何らかの観察を行ったときに電子が見つかる確率は、A、B、C とともに各 1/3 で等しいとします (Fig.2)。

つまり最初は、(A B C) となります。電子はあらゆる場所に存在しています。電子の位置を調べるために何らかの観察を行うと、それぞれ 1/3 の確率で小空間 A か B か C か、そのどこかで電子が見つかります。(A B C)、(A B C)、(A B C) の 3 種類の観察結果のどれかが、それぞれ 1/3 の確率で起こるものとします。(A B C) は小空間 A で電子が見つかるという意味です。

マクロにおけるモンティ・ホール問題と異なり、出題者も電子がどの小空間で見つかるかを知りません。実際に観察しないと知りえないことだからです。

ここで、挑戦者が小空間 A を選んだとしましょう。電子の位置を調べる観察によって生じる 3 種類の可能性を (A B C)、(A B C)、(A B C) と表します。(A B C) は、挑戦者は A を選んだが、観察したら電子は C で見つかるということを意味します。挑戦者は小空間を選んだだけであり、まだ観察は行われていません。3 種類はそれぞれ 1/3 の確率で起こります。

マクロにおけるモンティ・ホール問題と同じような状況を作るために、たとえば挑戦者が小空間 A を選んでいる (A B C) の場合、出題者は C か B の小空間には電子が存在しないことを示して、挑戦者が選択できる小空間を 2 つ (A と B、または A と C) に減らさなければなりません。

そこで出題者は、電子を追い払うため、(A B C) に別のマイナス電荷を近づけながら小空間 C または B の内部を見せ、そこには電子が無いことを示すことにします。出題者は、最後の観察によって電子がどの小空間で見つかるかを事前に知っているわけではありませんが、やらなければならないことは単純です。挑戦者が最初に選ばなかった 2 つの小空間のどちらか (C か B) を、それぞれ同じ確率で選び、マイナス電荷を近づけて電子を排除した状態を見せるだけのことです。

挑戦者が小空間 A を選び続けて電子の位置を当てるパターンは、(A B C) → (A B 空) → (A B 空) または (A B C) → (A 空 C) → (A 空 C) の 2 通りです。挑戦者が小空間 A を選び続けて電子の位置を外すパターンは、(A B C) → (A B 空) → (A B 空) または (A B C) → (A 空 C) → (A 空 C) の 2 通りです。電子の分布する小空間の数は 3→2→1 と減ります。

マクロの時と同じように、最終的結果の確率が (A B 空) : 1/6、(A 空 C) : 1/6、(A B 空) : 1/3、(A 空 C) : 1/3 となるのであれば、挑戦者は選択した小空間を変えるべきでしょう。

しかしミクロの場合、出題者も電子の位置がどこに定まるかを知らないなので、出題者が選ばなかった 2 つの部屋 (そのうちの 1 つは挑戦者が選んでいる) に電子が位置する確率は、どちらも 1/2 で等しいということになります。小空間の数が 3→2→1 と減るとき、電子の見つかる確率は 1/3→1/2→1/1 と変化するのです。

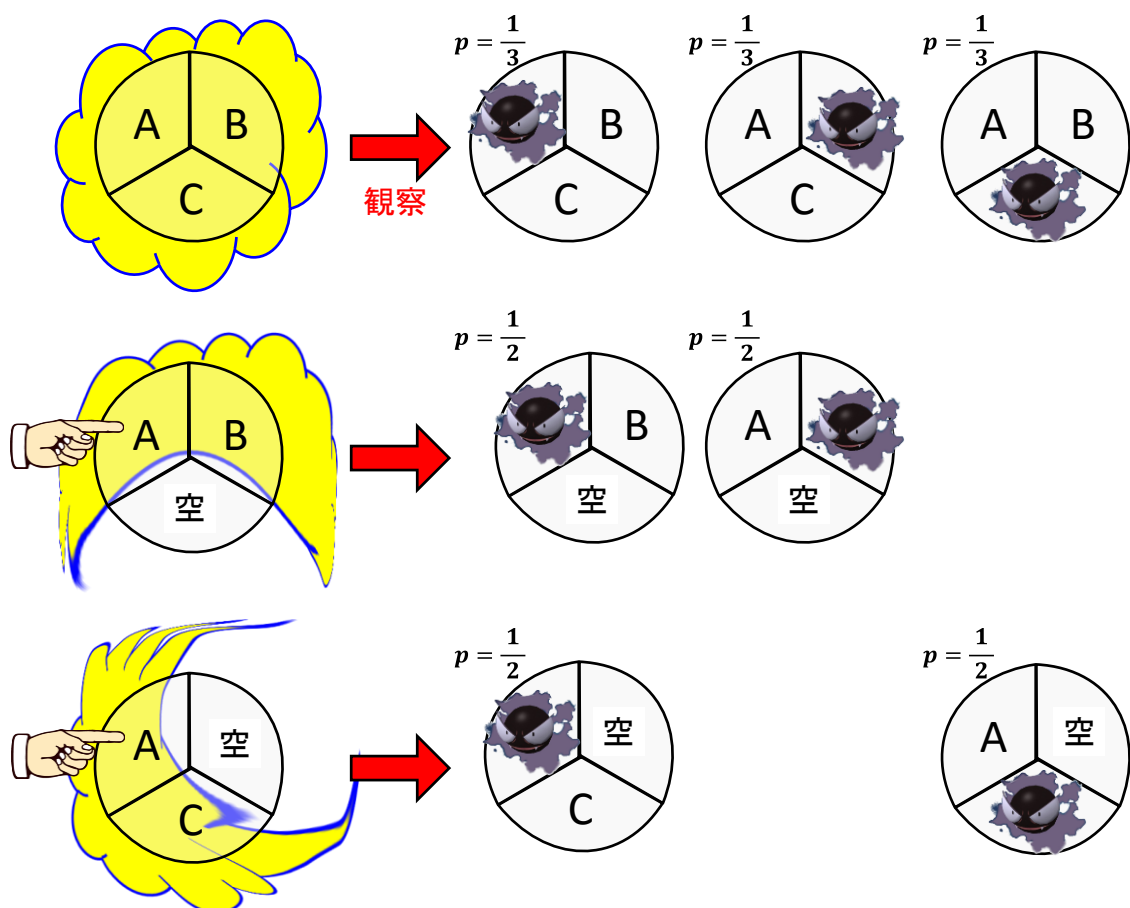


Fig.2 モンティ・ホール問題の正解（ミクロレベル）

遠くから見る限り、出題者の表情から正解を知っているか否かを判断したり、出題者がマイナスの電荷を隠し持っていることなどを見つけたりすることはできませんから、マクロのモンティ・ホール問題を行っている現場とミクロのモンティ・ホール問題を行っている現場とを外観で区別することはできません。挑戦者の動きも、出題者の行動も同じように見えます。

ミクロにおけるモンティ・ホール問題の思考実験が、以上のような理解で本当に良いのか、もう少しよく考えてみないといけませんが、マクロにおける問題で人間が行う直観的で非論理的な判断の物質的根拠につながっているかもしれないと期待できます。人間の直観は意外と量子論的であると言えるかもしれません。

つまり、「波であり且つ粒子である」、「位置を定めると運動量がわからない、運動量を定めると位置が不明」などのような量子的な性質が、人間の思考（特に無意識下での情報処理）にも影響しているのではないかという推測です。

この推測に基づくと、量子論的な性質を持ちベイズの定理などが成立しない確率と、数学的・論理的でベイズの定理が成立する確率とを区別して考える必要が生じます。

ここでは、今後の説明の便宜のために、前者を「ボーア確率」、後者を「ラプラス確率」と呼んで区別することにします (Table.1)。

Table.1 2種類の確率

ボーア確率	ラプラス確率
モンティ・ホール問題では、人間の直観的判断と一致する答えを導き出す。現代の数学・論理学では間違った答えとして扱われる。	モンティ・ホール問題では、数学的・論理的に正しい答えを導き出す。
印象：物質的、量子的、本能的、無意識的、情熱的 ベイズの定理は成立しない	印象：仮想的、理想的、抽象的、論理的、前頭葉的、意識的、冷静 ベイズの定理が成立する
物質のエントロピーを決める	物質のエントロピーとは無関係

数学で「統計的確率（実験的確率）」、「数学的確率（先験的確率、理論的確率）」と呼ばれているものは、確率概念としてはすべてラプラス確率です。

なおここでは、ラプラス確率が、モンティ・ホール問題において数学的・論理的に正しい答えを導き出すと説明していますが、数学は非常に柔軟な学問ですから、やがてボーア確率を適切に取り込んで、このような表現を不適切なものにするかもしれません。

2. 物質のエントロピーを決めるのはボーア確率である

さて、胡散臭い確率論に続くのは山勘のエントロピー論です。ここでは、物質のエントロピーを決めているのはボーア確率であって、ラプラス確率ではない、と山勘で決めて検討してみようと思います。

その理由は、ラプラス確率というのは幾らでも作り出せる（幾らでも仮想的に設定できる）確率なので、それが物質のエントロピーを決めるとすると、際限がなくなるからです。

そうすると、例えばシャノンの情報エントロピー $-\sum p \log p$ は物質のエントロピーと関係ないのかという疑問が生じます。詳細は後で説明しますが、情報エントロピーが物質のエントロピーである場合もあれば、そうでない場合もあるというのが答えです。どんな数式を用いるかは便宜上の問題に過ぎません。要は、エントロピー計算にボーア確率を用いれば物質のエントロピーになるのであり、ラプラス確率がボーア確率と一致するような状況においては、ラプラス確率を用いた情報エントロピーが物質のエントロピーと偶然一致することになります。

物質のエントロピーと情報エントロピーを結びつけたのは数学的形式でした。順を追って簡単に見ていきましょう。

物質のエントロピーを発見したのは熱力学者のクラウジウスです。系のエントロピー変化量は、一定の温度における熱量の変化量で表されました $\Delta S = \Delta Q/T$

ボルツマンやギブズは、気体分子運動論（統計力学）の立場からエントロピーの確率論的解釈を行いました。気体分子がとりうる運動状態の場合の数を W とすると $S = k_B \log W$ この式は、

等重率（等確率）の原理を仮定すると $S = k_B \sum p_i \log(1/p_i) = k_B \log(1/p)$ となります。

この半世紀ほど後、シャノンは情報理論を作り、情報エントロピー $S = \sum p_i \log(1/p_i)$ を考案しました。この数式を選んだのは計算の便宜の理由であることをシャノンや解説者のウィーバーは明記しています^{#2}。その数学的形式は、統計力学のエントロピーの式と同じでした。

すぐに、両者を統一的に解釈する試みが始まりました。しかし物理学者や数学者の反応は、両者は別のものであると考えたり、あるいは本質的に同じものであると考えたり、まちまちでした。いろいろな立場があることは、エントロピーの概念的基盤が軟弱であり、私のような素人の絡む余地があることを意味しています。

その後、情報理論では、Renyi や Tsallis などいろいろなエントロピーの計算式が提案され研究されていますが、基本的にはすべて $\sum p \log(1/p)$ の数学的形式を保っているようです^{#3}。

そういう歴史的経緯があるため、エントロピーとは何かという本質的な理解をしないまま、 $\sum p \log(1/p)$ の数学的形式で規定可能なものがエントロピーであると勘違いする人も出てくる恐れがあります。

実際、私も、この数学的形式に、エントロピーとしての本質的意味があるのだろうか、いろいろと調べましたが、計算の便宜上の意味しか見いだせませんでした。

そこで数式から離れて、確率とは何かという面からエントロピーの本質に迫ろうと試みることにした次第です。

今回の試みでは、現実の物質にとっての確率は、数学にとっての論理的な確率とは異なるのではないかと考えています。量子的な性質を持つ前者をボア確率と名付けました。

素人の山勘にすぎませんが、物質のエントロピーとは、物質のボア確率がもつ自由度の大きさのことであると思えます。その大きさの計算式や物理単位は、確率構造の違いを考慮しながら、エネルギーの変化量とエントロピーの変化量が相関するように便宜的に決めればよいと考えられます。

クラウジウスの熱力学エントロピーは種々雑多なエントロピーの混合であり、物質の様々な種類の量子的状態に関するボア確率の自由度に基づいていると考えられますが、次に紹介するトポロジカル・インデックスは、その中のひとつであり、かなり純粋な単一種類のエントロピーとして扱えるものであると考えられます。

3. トポロジカル・インデックスは物質のエントロピーである

統計力学では $S = k_B \log W$ の W として、物質系の平衡状態において出現し得る状態の種類の数を考えます。それらの状態がすべて等確率 p で出現すると仮定できるとき、 $p = 1/W$ とします。

^{#3} 私は数学者でも物理学者でもなく、詳しいことはわかりませんが、こうした難しい情報エントロピーの研究者によると、エントロピーと呼ばれているものは一定の数学的形式に従っているとのことでした。

しかし数年前に私は、出現し得る場合の数（静的な数）よりも変化の経路の数（動的な数）を重視し、非平衡状態における瞬間的な条件付確率が物質のエントロピーを決める確率 p であると考えました。そして 0100010... という 1 次元情報系について、要素数を 1 つずつ増やしながら最大エントロピー時の変化経路数を計算し「 $W = 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ 」という数列を得ました。

インターネットで検索したところ、この数列はフィボナッチ数列と呼ばれており、自然界に多く出現するが、その理由は謎であることを知りました。そこで私はフィボナッチ数の本³を探し、そこに紹介されていた日本フィボナッチ協会／研究集会（2012 年の第 10 回）に参加し、「フィボナッチ数列とエントロピー」という演題で、「フィボナッチ数列・黄金比 最大エントロピー仮説」を発表しました。

その内容は以下の通りです：「散逸構造^{#4}が成長し、増殖するときによく見られるフィボナッチ数列の出現は、何らかの 1 次元情報処理系がそのエントロピーを最大に保ちながら増大していく機序の存在を示している。フィボナッチ数列に限らず、自然界において何らかの数列が多く出現するときには熱力学的理由があると考えられる。」

つまり、自然界にフィボナッチ数列や黄金比が多く出現するのは、神秘ではなく、当たり前のことであるという内容の発表を行いました。

後日、私の発表を聞いていた化学者の細矢治夫が、私のエントロピーの計算方法（後述）は、細矢が 1971 年に発表した Topological Index (Hosoya Index と呼ばれている) と本質的に同じ方法であることに気づきました^{4, 5, 6}。トポロジカル・インデックスの持つ本質的な意味は、ずっと謎であったけれども、もしかするとエントロピーそのものかも知れないと^{#5}。

その後、黄金比が最大エントロピーを意味することは、情報理論の立場から堀部安一が 1982 年に発表していたことが明らかとなりました^{7, 8, 9, 10, 11}。しかし発表当時は、物質のエントロピーと情報エントロピーは別物であるとする立場が優勢であり、堀部の研究は、あくまで情報エントロピーの話であると理解され、自然界のフィボナッチ数には結びつかなかったようです。

まったく交流のない異分野での研究結果の偶然の一致のようにも見えるこうした知見を総合すると、トポロジカル・インデックスが物質のエントロピーそのものであることは明らかでしたが、そのような解釈を拒んでいたのが $-\sum p \log p$ （等確率のときは $-\log p$ ）というエントロピーの形式による心理的な束縛でした。

トポロジカル・インデックスと物質の化学熱力学的特性との基本的関係は、細矢によって研究されており、沸点や化学熱力学的エントロピーとの関係が明らかにされていました^{12, 13}。

^{#4} 散逸構造（さんいつこうぞう）とは、川の流に生じる渦巻きのように、摩擦（物質から物質へのエネルギー移動）によって生じる構造のことです。エネルギー移動が途絶えると消滅します。生き物のように寿命のあるものはすべて散逸構造です。仏教の無常観は散逸構造の儚い運命（さだめ）をとらえた世界観です。

^{#5} 私の計算方法（後で紹介）はトポロジカル・インデックスにエントロピーという解釈を与えるものであり、また、そのためだけに用いる必要があります。実際のエントロピーとしては細矢の方法でトポロジカル・インデックスをきちんと計算するのが適正です。例えば、単純な環状構造のトポロジカル・インデックスはルカ数列を生み出しますが、私の計算方法では元の数が奇数の時にルカ数列から少しズレるため補正が必要になります。

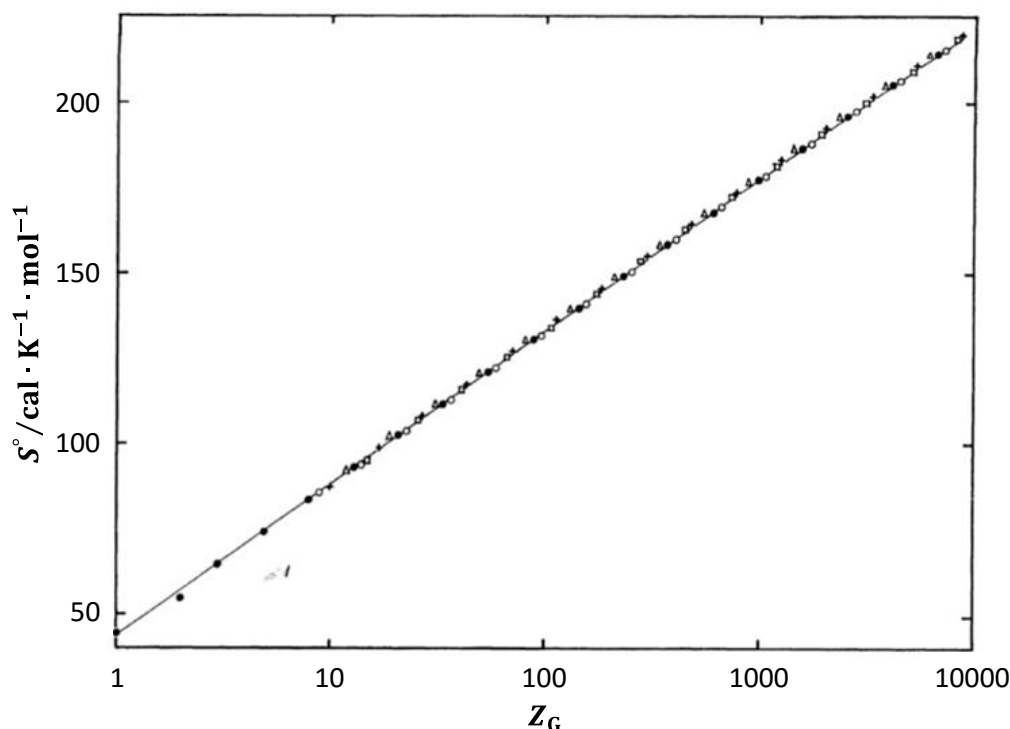


Fig. 5. $\log Z_G - S^\circ$ plot for larger members ($n \leq 20$) of several series of alkanes.
 ●: Normal, Δ : 3-methyl, $\circ$: 2,2-dimethyl, $+$: 2,3-dimethyl, $\square$: 2,4-dimethyl.

上図は、1980年の参考文献の Fig.5 です (文字等を見やすく変更)。Topological Index を Z_G とすると、この図 (横軸は対数軸) は $\log Z_G$ とエントロピーとの強い相関関係を示しています。

図を見ると、 Z_G の全範囲で、驚くほど直線的な比例関係を示しており、実験的誤差のない不自然さから、相関関係というよりは、むしろエントロピーそのものではないかと疑われます。

おそらく、この発表の時点で細矢が $\log Z_G$ の形式で、これをエントロピーであると発表していれば、数学的形式に拘っていた人々もそのまま受け容れたと考えられます。しかし、整数で扱えるトポロジカル・インデックスをわざわざ対数化して扱うメリットを見出せなかった細矢は、あえてそのようなことをしなっただけでしょう。

その後、トポロジカル・インデックスは、エントロピーとしての扱いを受けないまま半世紀が経過することになります。化学分野での発表であったため、物理学者から取り上げられることも無かったようです。

トポロジカル・インデックスは有機分子表面の電子の、まさに量子的な状態 (ボーア確率) を反映した純度の高いエントロピーであると考えられるので、物質のエントロピー研究の対象とされなかった惜しむべき半世紀間であったと考えられます。

4. 素数分布とエントロピー

トポロジカル・インデックスは maximum entropy (最大エントロピー、極大エントロピー)

です。グラフ理論による汎用的で量子論との相性も優れている数え方は細矢の説明を参照していただくとし、ここでは私が用いた簡単な数え方（応用には不適）を紹介しておきます。¹⁴

世の中で一番シンプルな一次元情報系についてエントロピー F を計算してみます。世の中で一番簡単なデータ列というのは、例えば 00101111011... のような 0 と 1 を要素(元)とする一次元配列です。変化の瞬間ごと(この瞬間を Δt とします ¹⁵)に、各要素はすぐ隣の要素と位置を換えることができます。ここではすべての交換は対称的で等確率であると考えます。

ただし、 $0 \leftrightarrow 0$ 、 $1 \leftrightarrow 1$ のように、同じ数値同士が位置を交換しても状態としては区別できない(つまり異なる状態として数えない)と考えます。ボア確率ですから量子論のように数えます。

また、100 が 001 に変わるように、二回続けての変化(この場合 $2\Delta t$ を要する)は認めません。一度に変化できるのは 0 と 1 とが隣同士のワン・ペアのみであり、101 が 010 になるような重複変化は認めません。二つ以上の 01(または 10)のペアとペアが互いに干渉し合わない限り、何ペアでも同時に変化、つまりそれぞれのペアの中で 0 と 1 が位置を交換できると考えます。

01010011 から任意の数のペアを、例えば 01010011 の下線部分のように2組選び、 Δt 後には 01100101 と変化することができると考えます。そして Δt 後に取り得るすべての場合の数を F として計算します。

000111 は 000111 または 001011 と変化できますから $F(000111) = 2$ と計算します。

011101 は 011101、101101、011011、011110、101011、101110 のいずれかへ変化できますから $F(011101) = 6$ と計算します。前方の 01 と後方の 101 の変化は独立している(つまり、互いに干渉し合わない)ことに着目すれば、 $F(011101) = F(01) \times F(101) = 2 \times 3 = 6$ と計算できます。

この条件下では、同じ長さの配列では 010101 または 101010 と、両者は本質的に同じことですが、0 と 1 が交互に並んだタイプの F が最大となることは簡単に理解できます。

そこで今度は、元の個数を n とし、 $n = 0$ の状態から 1 個ずつ元を増やしながら最大の F を計算します。結果を表に示します。

Table.2 一次元情報系の最大エントロピー

元の数	対称性	$F(0101\dots)$
0	0	$F() = 1$ と決める
1	0	$F(0) = 1$
2	1	$F(01) = 2$
3	2	$F(010) = 3$
4	3	$F(0101) = 5$
5	4	$F(01010) = 8$
6	5	$F(010101) = 13$
7	6	$F(0101010) = 21$

フィボナッチ数列が出てきました。世の中で一番シンプルな一次元情報系は、そのエントロピー F が最大の状態を保って成長する(増殖する、要素数を増やす)とき、フィボナッチ数列を生み出すのです。

ところで、この研究の先には何があるのでしょうか。素数の分布には確率的性質のあることが知られていますが、「確率と言えばエントロピー」、人間の脳における数概念の発生にもエントロピーが関係している可能性があります。実際、トポロジカル・インデックスというエントロピーはフィボナッチ数、ルカ数、ペル数などを生み出します。

今後、物質のエントロピーについては次のように扱うのが良いのではないかと(素人なので遠慮もなく)提案させていただきます：確率的状態にある物質系について、どのようなものであれ確率的自由度の大きさをエントロピーの候補と考えてよい。確率構造の違い等によって種々のエントロピー計算式を提案してよい。物理的、化学的実験等でエネルギー移動との関係性が証明されることにより、その実在が確認され、物理的単位が与えられたものを正式の物質エントロピーとして認める。

クラウジウスのエントロピーや細矢のトポロジカル・インデックスは、これらの条件をクリアした物質のエントロピーです。

¹ モンティ・ホール問題を2回続けて繰り返す場合の回答パターンの例。1回目は確率を意識させないように質問し、直観的な判断を導くようにする。2回目は確率を確認しながら数学的・論理的に正しい判断を導くようにする。

出題者	ここに3つの袋があります。その中の1つに宝が入っています。他の袋は空(カラ)です。 では、あなた(挑戦者)は、宝の入っていると思われる袋を1つ選んでください。		
挑戦者	(適当に袋を1つ選ぶ)		
出題者	今選んだ袋に宝のある確率は幾らですか？		
挑戦者	1/3 です。		
出題者	正解です。 今選んだ袋をAとします。他の2つの袋をB、Cとしましょう。 さてB、Cのうち、宝の入っていない袋を私(出題者)が選び、その中をお見せします。これをCとしましょう。 (袋Cを開けて中身が空であることを挑戦者に見せる)		
挑戦者	(袋Cの中身が空であることを確認する)		
出題者	さあ、袋が2つ残りました。AとBです。 あなたは先ほどAを選んだわけですが、ここで選択をBに変えても良いですよ。 いかがされますか？		
挑戦者	Aのままで良いです。	挑戦者	Bに変えます。
出題者	その理由を教えてください。	出題者	その理由を教えてください。
挑戦者	AもBも同じ確率だからです。	挑戦者	AもBも同じ確率だからです。 (AよりBの確率が大きいからです、と答える挑戦者はモンティ・ホール問題を知っている)
出題者	正解です。(この段階で論理的間違いを指摘しない) では、もう一度繰り返します。 ここに3つの袋があり、その中の1つに宝が入っています。宝の入っていると思われる袋を1つ選んでください。		
挑戦者	(適当に袋を1つ選ぶ)		
出題者	今選んだ袋に宝のある確率は幾らですか？		
挑戦者	1/3 です。		
出題者	正解です。 今選んだ袋をAとします。他の2つの袋をB、Cとしましょう。 袋Bに宝がある確率は幾らですか？		
挑戦者	1/3 です。		

出題者	袋 C に宝がある確率は幾らですか？
挑戦者	1/3 です。
出題者	どの袋も宝のある確率は 1/3 ですね。(2 回目は確率を意識させながら質問を進める) では、袋 B と C を組み合わせます。 袋 (B+C) の中に宝のある確率は幾らですか？
挑戦者	2/3 です。1/3 + 1/3 = 2/3 です。
出題者	そうですね。 袋 A に宝のある確率は 1/3、袋 (B+C) の中に宝のある確率は 2/3 です。 もしここで、袋 A か、袋 (B+C) のどちらを選んでもよいと言われたならば、誰でも当然、確率の大きい袋 (B+C) を選びますよね。よろしいですか？
挑戦者	もちろんです。
出題者	ではここで、先ほどと同じように私が、袋 B か C のうち宝の入っていない方を開けます。 (袋 C を開けて中身が空であることを挑戦者に見せる) さて、袋 (B+C) の中に宝のある確率は 2/3 でした。私が袋 C を開けましたが、袋 (B+C) の中に宝のある確率は変わらないですね。袋 (B+C) の中に宝のある確率は今も 2/3 です。 さあ、袋が 2 つ残りました。A と B です。 あなたは先ほど A を選んだわけですが、ここで選択を B に変えても良いですよ。 いかがされますか？
挑戦者	・・・・・・(悩みながら) 選択を A から B に変えます。(この段階でも選択を変えない人がいます)
出題者	袋 A を選び続けた場合に宝が当たる確率は 1/3、袋 B に選び変えた場合の確率は 2/3 です。 袋 B を選ぶことは袋 (B+C) を選ぶことなのです。納得いただけただけでしょうか？
挑戦者	・・・・・・(納得するも腑に落ちない、あるいは納得できない)

² Claude E. Shannon, Warren Weaver “*The Mathematical Theory of Communication*” (1949) 14, 49-50

³ 中村滋「フィボナッチ数の小宇宙 (改訂版)」日本評論社, 2008 年第 2 版

⁴ H Hosoya “*Topological Index. A Newly Proposed Quantity Characterizing the Topological Nature of Structural Isomers of Saturated Hydrocarbons*” Bulletin of the Chemical Society of Japan, 44 (1971) 2332-2339 [Link](#) ウェブリンクはすべて 2016.09.23 現在のものです

⁵ H Hosoya “*Topological Index and Fibonacci Numbers with Relation to Chemistry*” The Fibonacci Quarterly 11 (1973) 255-266 [Link](#)

⁶ 細矢治夫「トポロジカル・インデックス. フィボナッチ数からピタゴラスの三角形までをつなぐ新しい数学」日本評論社, 2012 年

⁷ Y Horibe “*An Entropy View of Fibonacci Trees*” The Fibonacci Quarterly 20 (1982) 168-178 [Link](#)

⁸ Y Horibe “*Notes on Fibonacci Trees and Their Optimality*” The Fibonacci Quarterly 21 (1983) 118-128 [Link](#)

⁹ Y Horibe “*Entropy of Terminal Distributions and the Fibonacci Trees*” The Fibonacci Quarterly 26 (1988) 135-140 [Link](#)

¹⁰ 堀部安一「黄金比とエントロピー」数理科学 No.294, サイエンス社, 1987 年

¹¹ 堀部安一「情報エントロピー論 (第 2 版)」森北出版, 1997 年第 2 版, 「付録: 黄金比とエントロピー」

¹² H Hosoya, K Kawasaki, K Mizutani “*Topological index and thermodynamic properties. I. Empirical rules on the boiling point of saturated hydrocarbons*” Bulletin of the Chemical Society of Japan, 45(1972) 3415-3421 [Link](#)

¹³ H Narumi, H Hosoya “*Topological index and thermodynamic properties. II. Analysis of the topological factors on the absolute entropy of acyclic saturated hydrocarbons*” Bulletin of the Chemical Society of Japan, 53(1980) 1228-1237 [Link](#)

¹⁴ Takashi Aueres “*The Fibonacci sequence in nature implies thermodynamic maximum entropy*” 数理解析研究所講究録 第 1852 巻 2013 年 165-176 [Link1](#) [Link2](#)

¹⁵ この Δt は無限小の時間という意味ではありません。系が量子的に異なる別の状態に変化するのに要する最少時間以内の時間という意味です。いったいどんな時間なのかはよくわかりません。物質のエントロピーは時間やエネルギー、摩擦といった現象とも深い関係を持っています。なお、無限小の時間という概念はゼノンの背理法によって否定されます → 尾立貴志「アキレスと亀とコントロール」日本フィボナッチ協会第 13 回研究集会報告書 2016 [Link1](#) [Link2](#)