

2015.09.08 尾立貴志

概要

数学者のカントール (Georg Cantor, 1845–1918) は、最初に**実数の連続性の公理** (と同等であるとされてきた有界単調数列の収束定理) を用いた証明法 (区間縮小法) で、また後に**対角線論法** を用いた証明法で、実数全体の要素数 (濃度) としての無限 ($\aleph$ アレフ) は、自然数全体の要素数としての無限 ($\aleph_0$ アレフゼロ、可算無限) よりも大きいということを示しました。

対角線論法は、いまだに正しい論法として紹介され続けていますが、インターネット等で調べると、無限集合に対してこの背理法を用いることの不合理性は、すでに多くの人々によって言い尽くされている感があり、改めてとり上げる価値が認められませんでした ¹。

そこで、ここでは、区間縮小法が、実数の連続性に対する 2 つの相反する考え方を混用するという論理的な間違いを犯していることを示します。

ただし、私は数学者ではないのでカントールの原著に基づいて議論することができません。そのため、「カントールによる区間縮小法を用いた証明」を紹介する志賀浩二の説明に基づいて、間違いの指摘を行います。

カントールの区間縮小法による証明について、Wikipedia には英語、ドイツ語、ヘブライ語による解説ページしかありません ² (2015 年 8 月現在。なお、蘭語ページもありますが、表題のみで説明がありません)。また、どれも説明が少しずつ異なっています。それだけ関心の少ない領域なのでしょう。志賀の説明は初心者向けに分かり易く変更されている可能性があります。原著レベルでの確認は専門家にお任せします。

1. 有界単調数列の収束定理 (実数の連続性の公理?)
2. 区間縮小法による証明
3. 「有界単調数列の収束定理」を実数の連続性の公理として認めない立場での検討
4. ゼノンとアルキメデスのアウフヘーベン
5. 背理法としてのアキレスと亀

^{#1} 2015.08.21 日本フィボナッチ協会 第 13 回研究集会 (協賛: 東京理科大学理数教育研究センター)
Achilles and the tortoise against Cantor's first uncountability proof and intersection theorem (nested interval property).
本稿 <http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/TortoiseAgainstCantor.pdf>
会場配布資料 <http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/TortoiseAgainstCantor20150821.pdf>

1. 有界単調数列の収束定理（実数の連続性の公理？）

どんなに近い2つの実数をとってきても、その2数の間には無限個の実数が存在します。同じことは有理数についても言えますが、有理数は隙間だらけです。実数は、数直線上を隙間なく連なっています。この実数の連続性を表現する数学的方法は幾種類かあります。

志賀は、有界単調数列の収束定理とも呼ばれているものを、【実数の連続性の公理】（の一番わかりやすい表現の仕方）として、次のように紹介しています³。

実数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ があって、次の2つの性質をみたしているとする。

- 1) $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$
- 2) ある数 M があって、すべての a_n は M より小さい。

このときある実数 α があって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

となる。

つまり、性質 1 番号 n が大きくなるに連れて単調に増加していく（あるいは途中のどこかで増加が停まっても構わないが、とにかく減少することは起こらない）数列があって、性質 2 その数列が上に有界であるときは（つまり、増加に上限＝天井があり、天井より上の大きな数の世界＝上界に数列が昇って行けないということ。上界に属する任意の数が M の候補となる）、性質 1)&2) $\Rightarrow$ 最小上界 supremum がただ1つあり（ M の候補の中に最も小さいものがあり、それが α であって、上限、上端とも呼ばれる）、番号 n が無限大 ∞ になるとき、この数列の値（極限と呼ぶ）は最小上界に一致する・・・一致する仕組みは具体的にうまく説明できないが、とにかく一致する・・・と考えて計算すると、数学的現象と物理現象がうまく合って便利なので、これを常に成り立つ定理として認めましょう・・・という話です。単調減少数列の場合は、全ての向きを逆向きに考えて、最大下界 infimum が極限になると考えます。

しかしこれは、番号 n が無限大 ∞ になったときに、まさに数列が極限となるときの仕組みが全く説明できていない、結構イイカゲンな定理です。「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 」と決めて、その上に数学（微積分、解析学）を構築すると、現実の物理現象を扱う上で便利なので、そう決めただけのことに過ぎません。たとえ、より厳密な $\varepsilon - \delta$ 論法を使っても、 $n = \infty$ において何が起こるかは説明できていないので、厳密さを追究する数学者は、無限小の取り扱いを研究して非標準的な解析学を構築しているようです⁴。

ここでは、「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 」にあるイイカゲンサに対して問題意識を持つことができれば、それで構いません。カントールの証明にあるイイカゲンサも簡単に理解できます。

2. 区間縮小法による証明

「カントールによる区間縮小法を用いた証明」の志賀による紹介⁵は以下の通りです。

【カントルの定理】 実数の集合は可算集合ではない。

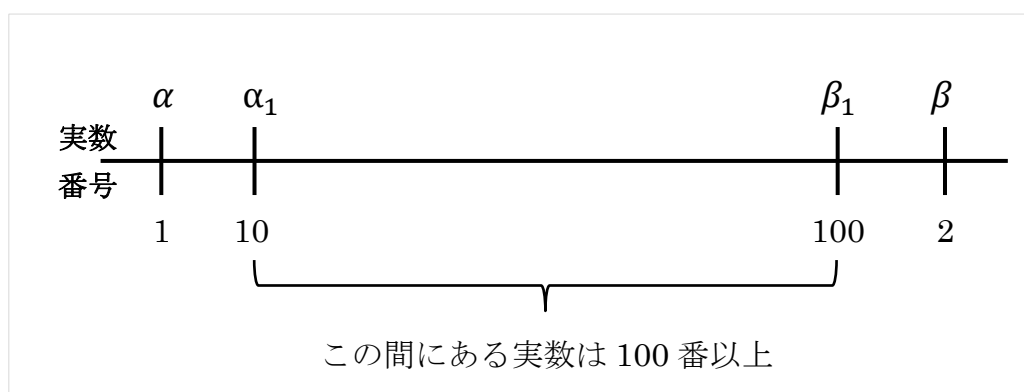
カントルはこの結果を 1873 年に見出した。公表されたのは 1874 年である。その証明には数直線の連続性が用いられた。以下でこの証明を述べてみることにする。なお有名な対角線論法を使うもう 1 つの証明は、この 17 年後、1891 年になって見出された。この証明は次章で述べることにする。

〔証明〕 実数の集合 R が可算集合とすると矛盾がでることを示す。

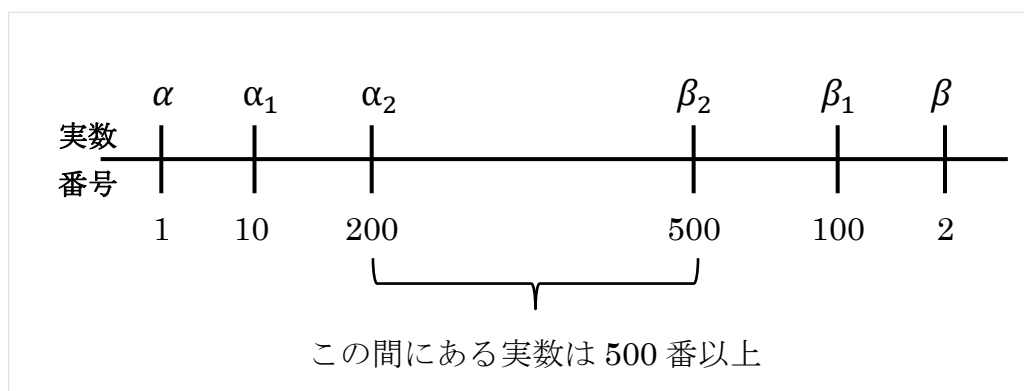
実数が可算集合とすると、実数は自然数と 1 対 1 に対応する。したがって 1 つ 1 つの実数にナンバーがつけられて、このナンバーにしたがって、3 番目の実数とか、532 番目の実数など、実数を番号によって名指しできることになる。

いま 1 番目の実数を α 、2 番目の実数を β とし、 $\alpha < \beta$ とする。

次に α と β のあいだにある実数で番号がもっとも小さい実数を α_1 とし、次に α_1 と β のあいだにある実数で番号がもっとも小さい実数を β_1 とする。 α_1 の番号が 10 で、 β_1 の番号が 100 であるときの状況を図で示すと下のようになる。



次に α_1 と β_1 のあいだにある実数で一番番号の小さい実数を α_2 として、 α_2 と β_1 のあいだにある一番番号の小さい実数を β_2 とする。たとえば α_2 の番号を 200 とし、 β_2 の番号を 500 とすると、図のようになっている。



こうして

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots \cdots < \beta_2 < \beta_1 < \beta$$

という実数列ができる。 α_n と β_n のあいだにある実数は、 n が大きくなるにつれ、番号がどんどん大きくなっていく。

さてここで「実数の連続性」（大人のための数学 第1巻, 4章, 5節⁶）を使うと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = B$$

となる実数 A, B が存在する。しかし、この2つの実数は、すべての α_n と、すべての β_n のあいだには含まれているので、この A, B には番号がつけられていない。

これはすべての実数にナンバーがつけられていると仮定したことに反している。したがって実数は可算集合ではないことが示された。（証明終わり）

これは衝撃的な結果であった。・・・・・・・・

先にカントールは、「1対1対応可能」であれば、同じ濃度の（つまり同じ大きさの）無限であると考えてることによって、自然数の集合、偶数の集合、有理数の集合などは全て同じ無限であることを証明していました。無限は1種類だったのです。しかし、検討対象が実数の集合となったときに、自然数の集合と「1対1対応できない」大きな無限が出現し、無限にも階層があることが示唆されたので、この発見はカントールにとって衝撃的だったのです。

しかし、この証明の最後の部分「 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = B$ となる実数 A, B が存在する。しかし、この2つの実数は、すべての α_n と、すべての β_n のあいだには含まれているので、この A, B には番号がつけられていない。」は、本当に正しいのでしょうか。いったいどのような根拠に基づいて、極限 A や B には n の番号が付いていないと判断したのでしょうか。ここは、この証明において最も重要な部分ですが、説明はありません。

本稿では、「**極限である A, B には番号が付いている**」と判断できることを説明し、なぜカントールは、極限には番号が付けられていないと勘違いしたのか、その原因を考えます。

なお、現在では、 $n \rightarrow \infty, |\alpha_n - \beta_n| \rightarrow 0$ を明示して、 $A = B$ として区間縮小法を紹介することが多いようです。

もちろん、この場合も、厳密な立場からは問題となる部分、つまり、両側から近づく2数が、いったいどのような仕組みで、実数の連続性（任意の2つの実数の間には無限個の実数が隙間なく存在する）に反して一致してしまうのか、肝心の部分が説明されることはありません。

志賀は、実数の連続性から得られる帰結として次のような形で区間縮小法を示しています⁷。

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$ で, $b_n - a_n \rightarrow 0$ ならば, ただ1つの実数 c が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$$

が成り立つ.

これは, 見方を変えると, 閉区間の減少列

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

が, $b_n - a_n \rightarrow 0$ をみたしている, ある実数 c が存在して

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

となることを示している. この意味でこれを区間縮小法という.

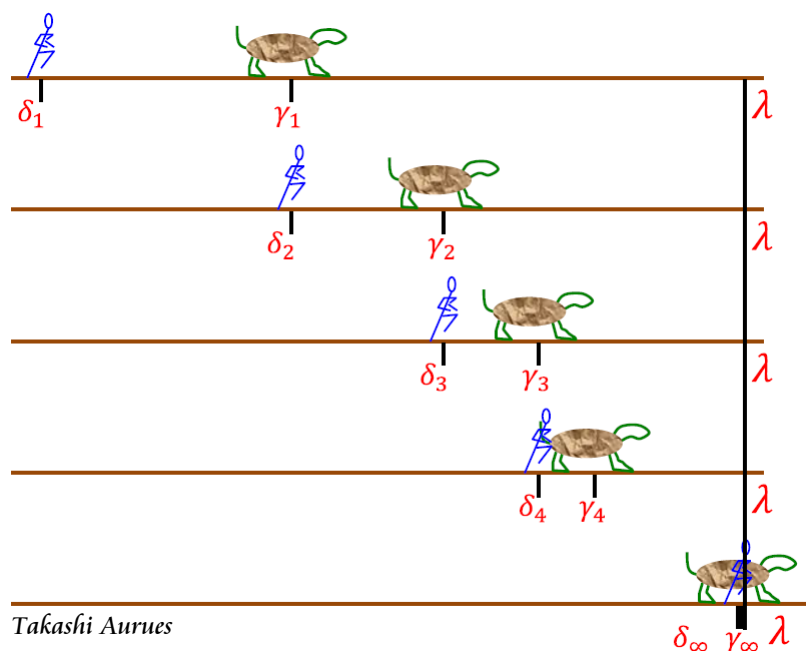
3. 「有界単調数列の収束定理」を実数の連続性の公理として認めない立場での検討

カントールによる証明のポイントは, 「数列 α_n の極限には番号 ($\in \mathbb{N}$) が付いていない」ということですが, 「いや, 番号は付いている」という反論を行います.

その準備として, (実数の連続性の公理の異なる表現のひとつとされてきた) 有界単調数列の収束定理を認めない立場を用意します. これは実数の連続性を認めないわけではありません. 実数の連続性を認めればこそ, 適当に数列の収束を認める定理は容認できないという立場です.

ここでは「アキレスと亀」に基づき, 実数の連続性について2種類の立場: アキレスは絶対に亀に追いつけないという立場と, アキレスは必ず亀に追いつくという立場の2種類を用意します.

「アキレスと亀」は次のような話です.



アキレスと亀が競争をすることになりました。アキレスは足が速いのでハンディーが与えられました。亀が少し早く出発し、それをアキレスが追いかけるような形で競争することになりました。アキレスが出発したとき (δ_1)、亀は γ_1 のところにいました。アキレスが亀のいたところ (γ_1) に到達したとき ($\delta_2 = \gamma_1$)、亀はもっと先に前進していて γ_2 にいました。次にアキレスが γ_2 に到達したとき、亀はさらに先に前進していて γ_3 にいました。これを延々と繰り返すので、アキレスは亀に追いつくことはできません。

λ は数列 γ_n と数列 δ_n の supremum (最小上界、上限、上端) です。 $\delta_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$, $\gamma_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ とすると、 δ_∞ , γ_∞ , λ の 3 者はどのような関係にあるのでしょうか。

次の表に、有界単調数列の収束定理に対する 2 つの異なる立場を並べて紹介します。左側には、この定理を認めない立場を「ゼノンの立場 (ツェノンの立場)」と名付け、右側には、この定理を認める立場を「アルキメデスの立場」と名付けて、比較しやすいように並べました。

有界単調数列の収束定理を認めない ゼノンの立場	有界単調数列の収束定理を認める アルキメデスの立場
アキレスは亀に追いつかない $\delta_\infty < \gamma_\infty < \lambda$	アキレスは亀に追いつく $\delta_\infty = \gamma_\infty = \lambda$
実数が有限のときは 「任意の二つの実数 $\alpha > 0$ と $\beta > 0$ について、 $n\alpha > \beta$ を満たすような自然数 n が存在する」 しかし 実数が無限 (大・小) のとき成立するとは限らない	たとえ無限 (大・小) であっても、 実数が具体的に示されるときは 取扱いが有限化するので 「任意の二つの実数 $\alpha > 0$ と $\beta > 0$ について、 $n\alpha > \beta$ を満たすような自然数 n が存在する」
考えることができるので無限は存在する	具体的に示せない無限は存在しないも同然
無限小は 0 ではない $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \varepsilon, \varepsilon \neq 0$	無限小は 0 として扱う $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
カントールの区間縮小法 [志賀浩二の解説] において $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = A - \varepsilon, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = B + \varepsilon$	カントールの区間縮小法 [志賀浩二の解説] において $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = B, \quad A = B = C$
実数 A は、すべての α_n より大きく、 実数 B は、すべての β_n より小さく、 $A + \varepsilon = B$	実数 C は、 $n = \infty$ (無限大の自然数?) を除いて 残りのすべての α_n と 残りのすべての β_n の あいだに挟まれている
$n \rightarrow \infty$ によっても、実数 A, B に到達しない。 究極点である実数 $A - \varepsilon, B + \varepsilon$ には α_n, β_n のナンバー $n = \infty$ が付いているが、 実数 A, B には α_n, β_n の ナンバー n が付いていない	$n \rightarrow \infty$ によって α_n は 上界の C に、 β_n は下界の C に到達。 <u>ゼノンの視点からは無限個の実数を一気に飛び越</u> える瞬間移動 teleportation に見える。 α_n, β_n の両方に共通の実数である C には α_n, β_n の ナンバー $n = \infty$ が付いている と考えざるを得ない (ゼノンの立場との対比上)

両立場の違いは、「無限の段階を経てもアキレスは決して亀に追いつかない」と考えるか、「無限の段階を経たときにアキレスが亀に追いつく」と考えるかです。これが両立場の出発点です。

もちろん現実世界で起こるのは、アキレスが亀に追いつき、追い越すことです。無限大も無限小も人間の空想の産物であり、アキレスが亀に永久に追いつかないというのも空想的出来事です。しかし、数学的思考としては、空想的なゼノンの立場も、現実的なアルキメデスの立場も、どちらもあってよいと思います。むしろ後者は、物質科学の道具として数学が役立つように（数学的厳密性を犠牲にして）妥協しすぎているように感じられます。つまりアルキメデスの立場は、人間の空想の産物である無限が、有限の物質科学を扱う数学の中に出現して自然科学者を困らせないように、無限を抑え込んでいるように見えます。

比較表の上段では、アルキメデスの性質（公理、原理）と呼ばれるものを載せ、両立場の違いを示しています。アルキメデスの立場では、「 α や β は無限（小・大）であってもいいよ。でも、実際に $n\alpha > \beta$ という数式の中に無限が、何らかの数表現する形式で具体的に示された時は、どんな無限も有限化してしまうから、結局は有限として扱ってよい」という考え方をしているように感じられます。

それに対して、ゼノンの立場は厳密です。有限のときはアルキメデスの性質を認めますが、無限（小・大）が入ってくるときは、アルキメデスの性質を認めません。

ゼノンの立場は、絶対にアキレスは亀に追いつかないと考えますから、無限小の存在を認めることになります。それを適当なところで妥協して、アキレスが亀に追いつくと考ええるアルキメデスの立場では無限小の存在を認めません。そんなものは空想の産物であって現実的ではないと考えます。アルキメデスの立場では「無限小=0」として扱います。

ゼノンの立場では、無限大が存在し、無限小も存在します。正の無限小 ε について、（無限大を除く）どんなに大きな自然数 n に対しても $n\varepsilon > 1$ を満たすことはありません。このとき、もし n が無限大になるならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \varepsilon, \quad \varepsilon \neq 0$$

と考えます。

アルキメデスの立場では、「無限大も、無限小も具体的に表現できない=存在しない」とみなす、という対応をしているように見えます。したがって任意の正数 α と β について、 $n\alpha > \beta$ を満たすような自然数 n が必ず存在することになります。また、どんなに小さな正数 ε についても、 $n\varepsilon > 1$ を満たすような自然数 n が必ず存在することになります。この n は無限大ではありません。つまり、有限回 ε を足し合わせると必ず 1 を超える。 $\varepsilon + \varepsilon + \dots + \varepsilon > 1$ （ $\dots$ は有限回）となります。このとき、もし n が無限大になるならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

とします。無限を使ったり、無限を認めない態度を示したりと、結構ご都合主義的なところがアルキメデスの立場の特徴です。

形式的に、 $1 = 3 \times \frac{1}{3} = 3 \times (0.333\ldots) = 0.999\ldots$, $\therefore 0.999\ldots = 1$ としてしまうことがありますが、これはアルキメデスの立場です。ゼノンの立場では $1 = 0.999\ldots + \varepsilon$, $\frac{1}{3} = 0.333\ldots + \varepsilon$ と計算し、 $0.999\ldots \neq 1$ です。

比較表の下段で、極限にナンバーが付いているかどうかを説明しています。

ゼノンの立場ではアルキメデス的な極限に番号は付いていません。数列の n を無限に大きくしても決して極限には至らないというのがゼノンの立場です。極限の一手手前の究極点までは番号が付きます。表では、ゼノンの立場で $n = \infty$ のときの到達点を究極点と呼んで、アルキメデスの立場の極限と区別しています。

それに対し、アルキメデスの立場では、 n が大きくなる（といっても、相当に大きな数ですが）途中で突然、極限が視野の中に入って来て、知らないうちに極限に落ち着くというような感じで話がまとまります。それは一種の近似操作ですが、そうしないと物質科学で役立つ数学になれないのです。有界単調数列の収束定理も、区間縮小法も、2 つの数の差が無限小に向かう時の近似方法を示しているにすぎず、実数の連続性を表していると認めることは難しいと言わざるを得ません。

そして、極限に番号が付いているか否かということに関しては、ゼノンの立場との対比上、アルキメデスの立場では番号が付いていると考えるしかありません。極限に「到達する」ということは、「付番されている」ということなのです。

しかし、アルキメデスの立場で極限に番号が付いている理由を、数学的に厳密に説明するのは困難です。なぜなら、そもそもアルキメデスの立場では極限への収束が、無限大の所（極限のごく近傍）では適当に誤魔化されているからです。もし、極限への収束が厳密に示されていれば、それに対応して、番号が付いていることを厳密に示すことができるでしょう。説明責任はゼノンにあるのではなく、まずアルキメデスにあるのです。

では、なぜカントールは[志賀の説明によるカントールは]、極限は全ての α_n と β_n とに挟まれているから、番号が付いていないと考えたのでしょうか。

無限（ $n = \infty$ ）を含む、文字通り全ての α_n と β_n とに挟まれている極限は、ゼノンの立場で考えた極限です。ゼノンの立場では数列は究極点に到達し、アルキメデスの立場の極限に到達することはなく、したがって極限に番号は付いていません。

カントールは、アルキメデスの立場から、つまり有界単調数列の収束定理を認める立場から数列の極限に迫りながら、区間縮小法の最終段階では、なんとゼノンの立場、つまり有界単調数列の収束定理を認めない立場から極限に番号は付いていないと判断したと考えられます。

これは、明らかに区別すべき2つの異なる立場の混用です。ゼノンの立場でも、アルキメデス

の立場でも構いませんが、それぞれの立場の中で論理的整合性を守るべきだと考えられます。

カントールが犯した間違いは何を意味しているのでしょうか。カントールの間違いは、有界単調数列の収束定理が示していることが、厳密には実数の連続性に反するものであるということを示しているように思われます。

数学界は（もちろん一部を除いて）、 $\varepsilon - \delta$ 論法の開発により数列の収束が厳密に規定できるようになったと評価していますが、実際は、まだまだ詰めが甘いように感じられます。

4. ゼノンとアルキメデスのアウフヘーベン

有界単調数列の収束定理を認めないゼノンの立場では、数列の上限や下限に数列のナンバーが付いていないことが明確です。それに対して、アルキメデスの立場では極限が付番されていると判断せざるを得ません。カントールの区間縮小法による証明方法は、異なる立場の混用を避けて、もっと厳密な議論を要するように思えます。

ゼノンの立場は、理想的、空想的、完全主義的、大脳新皮質的であり、アルキメデスの立場は、現実的、妥協的で、脳の発達段階でいうと原始的で爬虫類レベルです。そして現実の物質世界は、量子的・離散的なものが多数集まってできており、アルキメデス的な曖昧な存在です（アキレスは亀に追いつきます）。しかし、無限は大脳新皮質の空想の産物であり、現実には存在しないので、アルキメデス的世界観との相性は原理的に良くないと思われまふ。こうした問題の根本的な解決には、大脳新皮質と旧い脳との連携の熟成をあと？万年待つ必要があるように思えます・・・人類は滅びているでしょうが。

なお、以上までの議論は、実数というものを数直線上で大きさを持たない点としてイメージした場合の話です。

しかし、実数というものを、数直線上で無限小 ε の幅を持つ存在である（あるいは無限小の範囲内で揺らいでいる存在）と考え、例えば $\sqrt{2} - \varepsilon = \sqrt{2} = \sqrt{2} + \varepsilon$ と決めれば、 $n = \infty$ のとき、ゼノンの立場の究極点（たとえば $\sqrt{2} - \varepsilon$ ）がアルキメデスの立場の極限（たとえば $\sqrt{2}$ ）と一致することになります。そうすると、「有界単調数列の収束定理」を実数の連続性の公理の表現のひとつとして認めることができるようになります。

もちろんこの場合も、数列の収束先である極限にはナンバーが付いていることになり、カントールの区間縮小法で $\aleph$ が $\aleph_0$ より大きい無限であることを証明することはできません。

実数を示す点に大きさを持たせるか否かは、本質的には、実数の連続性を規定するときに、あいまいさ（ゆらぎ、遊び）を数に持たせるか、それとも定理に持たせるか、という違いに過ぎません。数直線上で数を表す点が無限小の大きさを持つと仮定する場合、アルキメデスの立場が論理的に厳密な要求を満たせるようになります⁸。

5. 背理法としてのアキレスと亀

少し脱線しますが、「アキレスと亀」は、次のような背理法（の前半部分）であるとも考えられ

ます。

「万物は静止しているか、動いているかのどちらかとする（二者択一しかないという）」という前提の下で

→「仮定：万物は静止していて、運動は無限小の時間で区分できる（運動は準静的変化が蓄積したもの、つまり静止が無限小の変化を無限回連続して加えるものである）」

→「アキレスは追い抜きを無限回試みても亀に追いつけない」

→「しかし、現実の世界では、アキレスは亀に追いつき、そして追い抜くので仮定が間違っている」（アキレスが亀よりはやく疲れて遅くなる場合、追い抜けないことも起こり得ますが）

→「結論：現実の世界では、万物は動いていて、無限小の時間などない（準静的変化など無い）」

背理法として捉えた「アキレスと亀」は、エントロピーというものをどのように解釈するかという課題とも深く関係しています [9.10](#)。

さて、無限小などは（現実の物質世界には）存在しないというのが背理法の結論ですが、ここでは、ゼノン（ツェノン）に、無限小を認める立場、つまりアキレスは亀に追いつけないという立場をとってもらいました。

なお、本稿は、カントールの区間縮小法にある論理的な間違いを指摘しただけであり、 $\aleph$ と $\aleph_0$ との関係について何かを述べるものではありません。区間縮小法でもなく、対角線論法でもない他の方法で、アレフゼロより大きな無限であるアレフの存在を証明できる可能性を否定するものではありません。

¹ 簡単な説明は「アキレスと亀とカントール（対角線論法編）」を参照

[<http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/TortoiseAgainstCantorDiagonal.pdf>]

² WIKIPEDIA: Cantor's first uncountability proof, Cantors erster Überabzählbarkeitsbeweis, הוכחת האי-מנייה הראשונה של קנטור

[https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor%27s_first_uncountability_proof]

[https://de.wikipedia.org/wiki/Cantors_erster_%C3%9Cberabz%C3%A4hlbarkeitsbeweis]

[https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%94%D7%95%D7%9B%D7%97%D7%AA_%D7%94%D7%90%D7%99-%D7%9E%D7%A0%D7%99%D7%99%D7%94_%D7%94%D7%A8%D7%90%D7%A9%D7%95%D7%A0%D7%94_%D7%A9%D7%9C_%D7%A7%D7%A0%D7%98%D7%95%D7%A8]

³ 志賀浩二『大人のための数学① 数と量の出会い 数学入門』紀伊國屋書店 2007 年 94 頁

⁴ 無限小解析、超準解析などと呼ばれているようです。

⁵ 志賀浩二『大人のための数学③ 無限への飛翔 集合論の誕生』紀伊國屋書店 2008 年 37－39 頁

⁶ 同上「大人のための数学①－4 章－5 節 極限と連続性」91－95 頁

⁷ 志賀浩二『位相への 30 講』朝倉書店 1988 年 31 頁

⁸ デデキントの切断以来の実数論を全部見直すメリットはあまりないと思われますが、量子的な世界観と相性の良い数学を作れるかもしれません。

⁹ Takashi Aurues『勝手にしやがれ！エントロピー』

http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/Fibonacci_entropy.pdf 準静的変化など無いという立場からエントロピーを論じています。

¹⁰ Takashi Aurues『「勝手にしやがれ！エントロピー 文系高校数学でも理解できる確率的世界像」を高校 2 年生が読むための準備説明』<http://www.zg.em-net.ne.jp/~aurues/triage/room1/GuideForFibonacciEntropy.pdf>