

【実数の連続性の公理】

実数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ があって、
次の2つの性質をみたしているとする。

- 1) $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$
- 2) ある数 M があって、すべての a_n は M より小さい。

このときある実数 α があって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

となる。

【カントルの定理】 実数の集合は可算集合ではない。

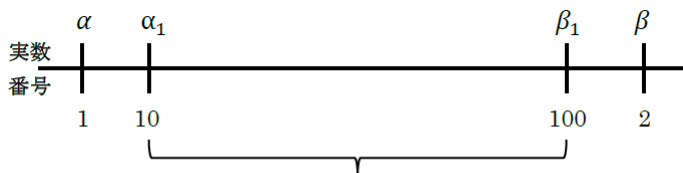
カントルはこの結果を1873年に見出した。公表されたのは1874年である。その証明には数直線の連続性が用いられた。以下でこの証明を述べてみることにする。なお有名な対角線論法を使うもう1つの証明は、この17年後、1891年になって見出された。この証明は次章で述べることにする。

〔証明〕 実数の集合 R が可算集合とすると矛盾がでることを示す。

実数が可算集合とすると、実数は自然数と1対1に対応する。したがって1つ1つの実数にナンバーがつけられて、このナンバーにしたがって、3番目の実数とか、532番目の実数など、実数を番号によって名指しできることになる。

いま1番目の実数を α 、2番目の実数を β とし、 $\alpha < \beta$ とする。

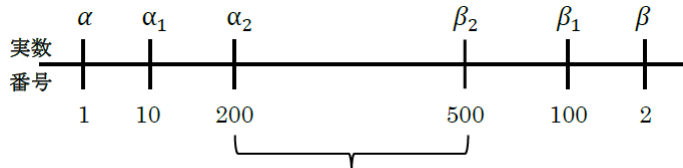
次に α と β のあいだにある実数で番号が最も小さい実数を α_1 とし、次に α_1 と β のあいだにある実数で番号が最も小さい実数を β_1 とする。 α_1 の番号が10で、 β_1 の番号が100であるときの状況を図で示すと下のようになる。



この間にある実数は100番以上

ようになる。

次に α_1 と β_1 のあいだにある実数で一番番号の小さい実数を α_2 とし、 α_2 と β_1 のあいだにある一番番号の小さい実数を β_2 とする。たとえば α_2 の番号を200とし、 β_2 の番号を500とすると、図のようになっている。



この間にある実数は500番以上

こうして

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_2 < \beta_1 < \beta$$

という実数列ができる。 α_n と β_n のあいだにある実数は、 n が大きくなるにつれ、番号がどんどん大きくなっていく。

さてここで「実数の連続性」(大人のための数学第1巻、4章、5節)を使うと

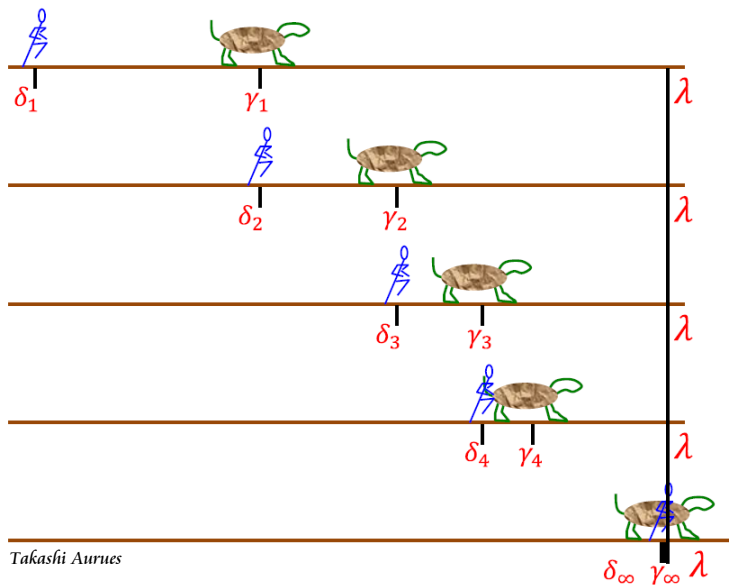
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = B$$

となる実数 A, B が存在する。しかし、この2つの実数は、すべての α_n と、すべての β_n のあいだにはさまれているので、この A, B は番号がつけられていない。←← エッ！本当にそうなのか？

これはすべての実数にナンバーがつけられていると仮定したことに反している。したがって実数は可算集合ではないことが示された。(証明終わり)

これは衝撃的な結果であった。……

- ・ カントルの区間縮小法による証明について、Wikipedia には英語、ドイツ語、ヘブライ語のページしかありません。
- ・ 自然界におけるフィボナッチ数とエントロピー ⇒ 「勝手にしやがれ！エントロピー」



Takasfii Aurues

アキレスが出発したとき (δ_1)、亀は γ_1 のところにいました。アキレスが亀のいたところ (γ_1) に到達したとき ($\delta_2 = \gamma_1$)、亀はもっと先に前進していて γ_2 にいました。次にアキレスが γ_2 に到達したとき、亀はさらに先に前進していて γ_3 にいました。これを延々と繰り返すので、アキレスは亀に追いつくことはできません。 λ は数列 γ_n と数列 δ_n の supremum (最小上界、上限、上端) です。

$\delta_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n, \gamma_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ とすると、 $\delta_\infty, \gamma_\infty, \lambda$ の3者はどのような関係にあるのでしょうか。

連続性の公理を認めない ゼノンの立場	連続性の公理を認める アルキメデスの立場
アキレスは亀に追いつかない $\delta_\infty < \gamma_\infty < \lambda$	アキレスは亀に追いつく $\delta_\infty = \gamma_\infty = \lambda$
実数が有限のときは 「任意の二つの実数 $\alpha > 0$ と $\beta > 0$ について、 $n\alpha > \beta$ を満たすような自然数 n が存在する」 しかし、実数が無限 (大・小) のとき成立するとは限らない	たとえ無限 (大・小) であっても、 実数が具体的に示されるときは取扱いが有限化するので 「任意の二つの実数 $\alpha > 0$ と $\beta > 0$ について、 $n\alpha > \beta$ を満たすような自然数 n が存在する」
考えることができるので無限は存在する	具体的に示し得ないという意味で無限は存在しないも同然
無限小は 0 ではない $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \varepsilon, \varepsilon \neq 0$	無限小は 0 として扱う $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
カントールの区間縮小法 [志賀浩二の解説] において $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = A - \varepsilon, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = B + \varepsilon$	カントールの区間縮小法 [志賀浩二の解説] において $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = B, \quad A = B = C$
実数 A は、すべての α_n より大きく、 実数 B は、すべての β_n より小さく、 $A + \varepsilon = B$	実数 C は、 $n = \infty$ (無限大の自然数?) を除いて 残りのすべての α_n と、残りのすべての β_n のあいだに はさまれている
$n \rightarrow \infty$ によっても、実数 A, B に到達しない。 究極点である実数 $A - \varepsilon, B + \varepsilon$ には α_n, β_n のナンバー $n = \infty$ が付いているが、 実数 A, B には α_n, β_n の ナンバー n が付いていない	$n \rightarrow \infty$ によつて α_n は上界の C に、 β_n は下界の C に <u>ゼノンの視点からは深淵を飛び越えて移るように見えるが、</u> α_n, β_n の両方に共通の実数である C には α_n, β_n の ナンバー $n = \infty$ が付いている と考えざるを得ない (ゼノンの立場との対比上)

実数の連続性の公理を認めないゼノンの立場では、数列の上限や下限に数列のナンバーが付いていないことが明確です。それに対して、アルキメデスの立場では極限が付番されていると判断せざるを得ません。カントールの区間縮小法による証明方法は、異なる立場の混同を避けて、もっと厳密な議論を要するように思えます。

ゼノンの立場は、理想的、空想的、完全主義的、大脳新皮質的であり、アルキメデスの立場は、現実的、妥協的で、脳の発達段階でいうと原始的で爬虫類レベルです。そして現実の物質世界は、量子的・離散的なものが多数集まってできており、アルキメデス的存在です (アキレスは亀に追いつきます)。しかし、無限は大脳新皮質の空想の産物であり (現実には存在しない)、アルキメデス的世界観との相性は原理的に良くないと思われます。大脳新皮質と古い脳との連携の熟成をあと? 万年待つ必要があるように思えます・・・人類は滅びているでしょうが

数学者のカントール(Georg Cantor, 1845－1918)は、最初に**実数の連続性の公理**を用いた証明法(**区間縮小法**)で、また後に**対角線論法**を用いた証明法で、実数全体の要素数(濃度)としての無限($\aleph$ アレフ)は、自然数全体の要素数としての無限($\aleph_0$ アレフゼロ、可算無限)よりも大きいということを示しました。

ここでは、区間縮小法が、実数の連続性に対する2つの考え方を混同するという間違いを犯していることを示します。

ただし、私は数学者ではないのでカントールの原著に基づいて議論することができません。「カントールによる区間縮小法を用いた証明」を紹介する志賀浩二先生の説明に基づいて、間違いの指摘を行います。原著レベルでの確認は専門の方々にお任せします。

配布資料1頁に、志賀先生の説明:**【実数の連続性の公理】**、**【区間縮小法】**、**【カントールの定理】**を載せています。

カントールによる証明のポイントは、「数列 α_n の極限には番号 ($\in N$) が付いていない」ということですが、「いや、番号は付いている」という反論を配布資料2頁で紹介します。

配布資料2頁に、実数の連続性の公理に対する2つの異なる立場を並べて紹介しています。左側には、この公理を認めない立場を「**ゼノンの立場**」と名付け、右側には、この公理を認める立場を「**アルキメデスの立場**」と名付けて、比較しやすいように並べています。

両立場の違いは、「無限の段階を経てもアキレスは決して亀に追いつかない」と考えるか、「無限の段階を経たときにアキレスが亀に追いつく」と考えるかです。これが両立場の出発点です。

私は、どちらの立場も、あってよいと思います。このどちらが正しいかを議論することに興味を感じません。現実世界で起こるのは、アキレスが亀に追いつき、追い越すことです。

しかし、数学的思考としては、空想的なゼノンの立場も、現実的なアルキメデスの立場も、どちらもあってよいと思います。むしろ后者は、物質科学の道具として数学が役立つように(数学的厳密性を犠牲にして)妥協しすぎているように感じています。

アルキメデスの立場は、人間の空想の産物である無限が、有限の物質科学を扱う数学の中に出現して科学者を困らせないように、無限を抑え込んでいるように感じられます。

比較表の上段では、アルキメデスの公理(原理、性質)と呼ばれるものを載せ、両立場の違いを示しています。

アルキメデスの立場では、「 α や β は無限(小・大)であってもいいよ。でも、実際に $n\alpha > \beta$ という数式の中に無限が具体的に示された時は、どんな無限も有限化してしまうから、結局は有限として扱ってよい」という考え方をしているように感じられます。

それに対して、ゼノンの立場は厳密です。有限のときはアルキメデスの公理を認めますが、無限(小・大)が入ってくるときは、公理を認めません。

ゼノンの立場は、絶対にアキレスは亀に追いつかないと考えますから、無限小の存在を認めることになります。それを適当なところで妥協して、アキレスが亀に追いつくと考えるのがアルキメデスの立場なので、アルキメデスの立場では無限小の存在を認めません。そんなものは空想の産物であって現実的ではないと考えます。

比較表の下段で、極限にナンバーが付いているかどうかを説明しています。

ゼノンの立場ではアルキメデス的な極限に番号は付いていません。数列の n を無限に大きくしても決して極限には至らないというのがゼノンの立場です。

それに対し、アルキメデスの立場では、 n が大きくなる(といっても、相当に大きな数ですが)途中で、極限が視野の中に入って来て、適当なところで極限に落ち着くというような感じで話がまとまります。そうしないと物質科学で役立つ数学になれないからです。

そして、極限に番号が付いているか否かですが、ゼノンの立場との対比上、番号が付いていると考えるしかありません。番号が付いている理由を数学的に厳密に説明するのは困難です、なぜなら、そもそもアルキメデスの立場では極限への収束が、無限大の所(極限のごく近傍)では適当に誤魔化されているからです。もし、極限への収束が厳密に示されていれば、それに対応して、番号が付いていることを厳密に示すことができるでしょう。ここでは、ゼノンの立場との対比上としか説明できません。

では、なぜカントールは[志賀先生の説明によるカントールは]、極限は全ての α_n と β_n とに挟まれているから、番号が付いていないと考えたのでしょうか。

無限を含む、文字通り全ての α_n と β_n とに挟まれている極限は、ゼノンの立場で考えた極限です。ゼノンの立場では番号は付いていません。

カントールは、アルキメデスの立場から、つまり実数の連続性の公理を認める立場から数列の極限に迫りながら、区間縮小法の最終段階では、なんとゼノンの立場から極限に番号は付いていないと判断したのです。

これは、明らかに区別すべき2つの異なる立場の混用です。ゼノンの立場でも、アルキメデスの立場でも構いませんが、それぞれの立場の中で論理的整合性を守るべきだと考えられます。

本日は、解析学に対する厳密な基礎付けを開始したコーシー(Augustin Louis Cauchy, 1789.8.21－1857)の誕生日です。